Nivelamento para Lego 2: Lista de Exercício 1

Data de Entrega: 18/08/2025, até 23hs

Professor:
Rogério Jerônimo Barbosa
rogerio.barbosa@iesp.uerj.br

Monitor
Rodrigo Roll
rodrigotamusroll@iesp.uerj.br

Parte 1 – Esperança Estatística e Propriedades do somatório

1) Mostre que cada uma das propriedades do operador de Esperança Estatística é verdadeira. Para isso, basta desenvolver o lado esquerdo de cada uma das expressões abaixo, usando as propriedades do somatório.
Para esse exercício, você deve consultar o material auxiliar, sobre notação com índice, uso de somatório e o operador de esperança estatística.

Em todos os casos, utilizaremos a notação para casos discretos (ver material auxiliar). Mas as propriedades demonstradas valerão também para o caso contínuo.

a) <u>Propriedade: Multiplicação por uma constante:</u> $\mathbb{E}[aX] = a\mathbb{E}[X]$

$$\mathbb{E}[aX] = \sum_{i=1}^{N}(af_i x_i)$$

b) <u>Propriedade: Esperança de uma constante:</u> $\mathbb{E}[a] = a$

$$\mathbb{E}[a] = \sum_{i=1}^{N}(f_i a)$$

Parte 2 – Álgebra Linear

2) Represente graficamente os vetores abaixo, em gráficos de 2 e 3 dimensões

a) $\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$

f) $\begin{bmatrix}-1\\2\\2\end{bmatrix}$

g) $\begin{bmatrix}1\\-5\\2\end{bmatrix}$

h) $\begin{bmatrix}2\\4\\-2\end{bmatrix}$

3) Em cada uma das letras deste exercício, apenas diga se a combinação linear dos vetores tridimensionais listados forma uma reta, um plano ou se preenche todo o $\mathbb{R}^3$

a) $\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix}3\\6\\9\end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix}0\\2\\3\end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix}2\\0\\0\end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix}0\\2\\2\end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$

4) Sejam $\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix}4\\1\end{bmatrix}$ e $\boldsymbol{w} = \begin{bmatrix}-2\\2\end{bmatrix}$. Desenhe, num mesmo plano $\boldsymbol{xy}$ (plano cartesiano bidimensional):

a) $\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}$

b) $\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w}$

5) Multiplicação de matrizes:

a) Encontre o produto $\boldsymbol{AB}$ usando:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix}2 & -1 & 7\\-4 & 5 & 0\end{bmatrix} \text{ e } \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix}0 & 1 & 6\\1 & 8 & 0\\3 & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

b) O produto $\boldsymbol{BA}$ existe?

6) Seja $\boldsymbol{X}$ uma matriz qualquer com dimensões $\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{k}$. Mostre que $\boldsymbol{X'X}$ é uma matriz simétrica (não é necessário fazer contas – apenas usar da própria definição).

7) Sejam os vetores:

$$\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix}-0{,}6\\0{,}8\end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{w} = \begin{bmatrix}8\\6\end{bmatrix}$$

a) Calcule os produtos escalares:

- $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}$
- $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{w}$
- $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w})$

b) Calcule o comprimento (norma, *length*) desses vetores:

- $||\boldsymbol{u}||$
- $||\boldsymbol{v}||$
- $||\boldsymbol{w}||$

c) Normalize os vetores $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ – isto é: construa novos vetores que apontem na mesma direção desses originais, mas que tenham comprimentos iguais a um.

d) Calcule o cosseno do ângulo formado por

- $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$
- $\boldsymbol{w}$ e $\boldsymbol{v}$

8) Resolva as equações usando o método de eliminação e *back-substitution*:

a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 9 \end{bmatrix}$

9) Usando o método de Gauss-Jordan, encontre a inversa das seguintes matrizes:

a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

10) Por que a matriz $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$ não tem inversa?

Parte 3 – Cálculo

11) Determine o domínio das funções a seguir

a) $f(x) = x^3$

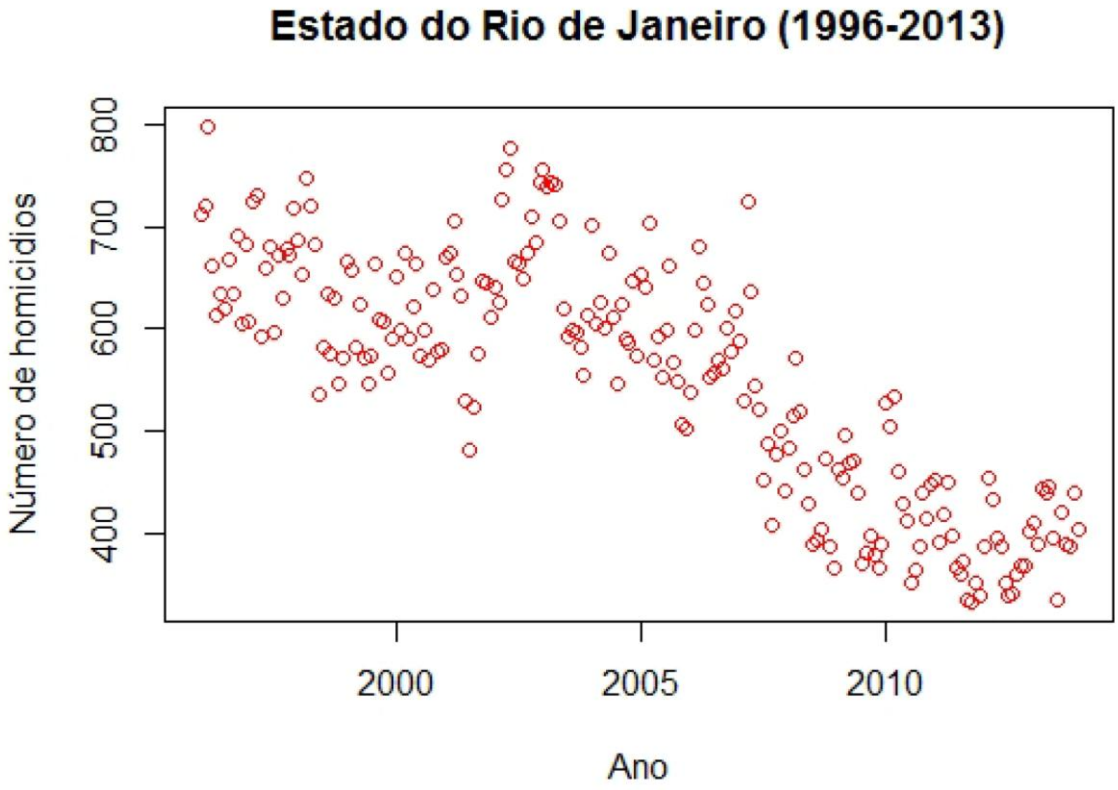
b) $\frac{x-1}{x-3}$

c) $f(x) = \ln x$

d) $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$

12) Encontre a equação da reta que passa pelos pontos do plano $(\mathbf{1}, \mathbf{2})$ e $(\mathbf{3}, \mathbf{1})$

13) **Qual função você escolheria para representar a média dos homicídios mensais no Estado do Rio de Janeiro apresentado na figura a seguir?**



14) **Determine os limites das funções abaixo:**

a) $\lim_{x \to 5} (x^2 + 2x - 1)$

b) $\lim_{t \to 0^+} \frac{t+2}{(t-2)^2}$

c) $\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2}{x+1}$

15) Calcule as derivadas:

a) $\frac{d}{dx}(x^2 + 2x - 1)$

b) $\frac{d}{dx} 4x^3$

c) $\frac{d}{dx}\frac{1}{x}$

d) $\frac{d}{dx}\frac{1}{x^2}$

16) Calcule o valor mínimo da função: $\boldsymbol{f(x) = 1 - 3x + 4x^2}$